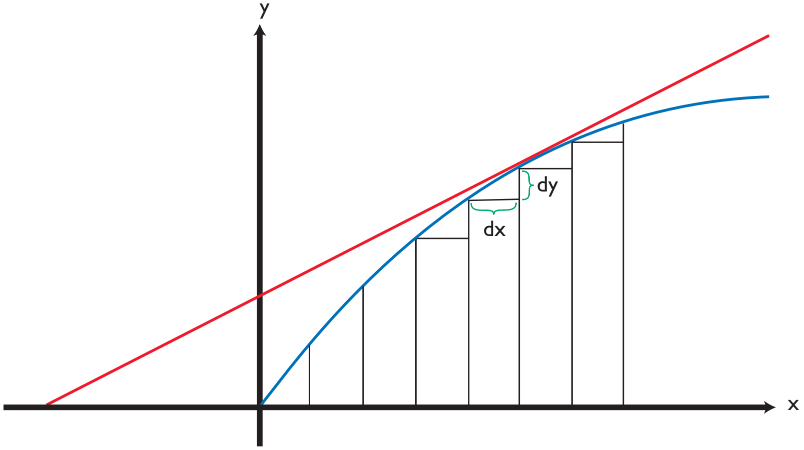
erkendelsesområder. Descartes havde dette problem meget tæt på i forhold til kristendommen. Men også filosofiske synspunkter kunne komme i konflikt med naturvidenskabens erkendelser. F.eks. var der stærke argumenter for, at det tomme rum ikke kunne findes, selvom eksperimenter tydeligt viste det modsatte. Hvem skulle afgøre sådanne stridigheder om ikke filosofferne? På den anden side fik naturvidenskaben efterhånden autoritet og evne til at skabe konsensus, og derfor også krav på at være den eneste disciplin, der for alvor kunne levere viden. Ved 1600-tallets slutning var der ikke længere mulighed for at antage en art enhedsviden. Kunstnere, teologer, filosoffer og naturvidenskabsmænd lavede forskellige ting, på hver deres måde og ofte i helt forskellige institutionelle sammenhænge.

Formler for det uendelige og det tilfældige

Den videnskabelige revolution baserede sig i høj grad på nye instrumenter og redskaber: kikkert, mikroskop, termometer og barometer. Men der udvikledes også nye abstrakte teknikker – f.eks. Descartes' arbejde med at omsætte geometrisk viden til aritmetisk, altså talbaseret, viden. Men der var flere væsentlige fysiske fænomener, man havde svært ved at give tal. Det krævede udvikling af nye former for matematik, nye måder at regne på, og resulterede i det, man kalder "analysen" – nemlig differential- og integral-regning. De to afgørende skabere af denne var Newton og Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). De gik til problemet på hver deres måde: den ene mest som fysiker, den anden som matematiker.

Differential- og integralregningen var nødvendig for at håndtere væsentlige fysiske problemstillinger knyttet til f.eks. bevægelse. Det var simpelt at måle den tid, det tog at bevæge sig en bestemt distance, og med jævn bevægelse – dvs. uden acceleration- at angive hastigheden. Men al interessant bevægelse har med acceleration at gøre. Acceleration betyder, at hastigheden skifter over tid. Problemet var så, om man kunne danne et begreb om hastighed knyttet til et bestemt tidspunkt? Et argument imod dette er, at hvis et tidspunkt netop er et punkt, så har det ingen udstrækning, og der er således ingen afstand, noget bevæger sig på, eller noget tidsrum, bevægelsen sker i. Hvis man bevæger sig 144 km på to timer med jævn bevægelse, så er hastigheden hele tiden 72 km/t. Men hvad er den på et givet tidspunkt? Også 72 km/t? Men på nul sekunder bevæger man sig vel nul meter, så her skulle hastigheden være $\frac{0}{0}$ m/s – eller hvad? Newton udviklede en række begreber til at håndtere den slags problemer, ligesom han udviklede en måde at regne med sådanne størrelser på. Fordi disse fænomener var knyttet til bevægelse og forandring, altså til noget, der på sin vis er flydende, kaldte Newton sin opdagelse for "fluxioner".

Samtidig med Newton arbejdede Leibniz med en helt anden slags problemer knyttet til studier af talrækker. Han udviklede også en række begreber knyttet til de fænomener, som Newton havde studeret, nemlig forandringer, der kunne beskrives som kurver i et cartesiansk koordinatsystem. Begge betragtede fænomenerne som knyttet til en art regning med uendeligt små størrelser, såkaldte infinitesimaler, og de udviklede begge en forståelse af, hvad man i dag kalder differentiering og integrering, eksemplificeret ved forholdet mellem et legemes bevægelse og dets hastighed. De indså også disse operationers indbyrdes forhold, at den ene var det omvendte af den anden, ligesom de begge udviklede metoder til at analysere sådanne fænomener, f.eks. deres maksima og minima, altså hvornår hastigheden var størst eller mindst. Og endelig udviklede de begge notationer baseret på deres begreber, hvoraf man i dag hovedsageligt benytter Leibniz'. Men vigtigst af alt: ved hjælp af disse nye begreber kunne de løse problemer, som hidtil havde været uløselige. Det var en udvikling af nye matematiske begreber og metoder, som ikke var set siden middelalderens indførelse af decimaltal. Pludselig blev en række komplekse fænomener beskrivelige og analyserbare



Her ses en moderne forklaring af Leibniz' infinitesimalregning. Princippet er, at forholdet dy/dx svarer til tangenthældningen, når dy og dx går mod 0, dvs. vælges "uendeligt små".

med matematiske begreber, og de kunne gøres håndterlige med tal. Måling blev derved endnu mere væsentligt, og endnu mere kunne beregnes.

Samtidig var disse nye begreber og operationer ikke meningsfulde set med strengt logiske øjne. Flere filosoffer kritiserede således metoderne som meningsløse, bl.a. fordi de typisk involverede, at man måtte give mening til at dividere med 0 – men ikke desto mindre virkede de. I de følgende par hundrede år arbejdede man med at forstå og redegøre for denne situation. Det krævede forståelse af helt fundamentale egenskaber ved matematisk erkendelse og de matematiske grundbegreber – f.eks. hvad tal egentlig er, hvad en kontinuerlig bevægelse rent matematisk er osv. – problemer, der først begyndte at få deres løsning et par hundrede år senere.

Infinitesimalregningen er ikke det eneste eksempel på, at man med helt nye begrebsdannelser kan beregne og måle nye fænomener. Et andet eksempel er sandsynlighed. I dag er ideerne om risiko, usikkerhed, tilfældighed og sandsynlighed helt indgroede. Man hører meget ofte, at dette eller hint forøger sandsynlighed for noget, eller at noget er en risikofaktor, dvs. at det ikke er en egentlig mekanisk årsag til noget, men netop forøger en sandsynlighed. Terningespil og kortspil har man kendt stort set i alle kulturer og til alle tider. Strategier og vurderinger af held eller uheld ligeså. Men som tidligere nævnt, er det først i årene omkring 1660, at man bliver i stand til at regne med sandsynligheder og dermed løse problemer knyttet til f.eks. kortspil. Hvordan skal man dele puljen i et spil, der afbrydes for tidligt? Er det et moralsk eller et matematisk problem? Kan der overhovedet gives et korrekt svar? Erfaringer med terningkast gav også problemer, og man kunne formulere spørgsmål, der vedrørte sandsynligheden for i f.eks. fire kast med en terning at få en sekser, eller hvornår odds var fifty-fifty for at få en sekser i kast med to terninger. Men man havde ikke hidtil haft mulighed for at give svar.

Det var matematikeren Blaise Pascal, der først og fremmest fandt en række løsninger på den slags problemer. Han udviklede regler for regning med sandsynligheder, og de blev videreudviklet af Christiaan Huygens (1629-95) i en bog om, hvordan man ved beregning løste problemer knyttet til hasardspil.

Både Pascal og Huygens var klar over, at sandsynlighed var et begreb, der kunne bruges til at betegne en bestemt størrelse knyttet til udfald af tilfældige begivenheder, som f.eks. kast med terninger, og til grader af overbevisning, som f.eks. hvor meget eller fast, man skulle tro på noget. Det var en sondring mellem statistisk sandsynlighed og grad af rationel overbevisning. Pascal brugte den sidste form for sandsynlighed til at give et argument for, at det var bedst at tro på en kristen Gud. Der er jo to muligheder: enten at der findes en kristen Gud, eller at der ikke gør. Hvis der er en Gud, og man ikke tror på ham, risikerer man evig straf, og hvis der ikke er en kristen Gud, og man alligevel tror på ham, påfører man sit liv en lille ulempe. I valget mellem de to muligheder er det meget risikabelt ikke at tro, og meget lidt omkostningskrævende at tro, men med mulighed for stor gevinst. Ergo er det mest rationelt at tro på en (straffende) kristen Gud!

Overvejelserne over sandsynlighed og tilfældighed fremkommer samtidig med fremkomsten af det mekanistiske verdenssyn, hvor alle naturlige processer bliver forstået som kausale sammenhænge. Da alle processer sker med nødvendighed, dvs. er underkastet eviggyldige lovmæssigheder, er opfattelsen af begivenhedsforløb også deterministisk – forstået på den måde, at en situation med nødvendighed fører til en anden og senere situation. Et univers, der på den måde fungerer som en maskine, er også et univers, der ikke tillader tilfældighed, og hvor principielt alt burde kunne forudses – hvis man ellers har viden nok. Den person, der har viden, og som skal forudse eller indse noget, er derimod ikke selv del af dette mekaniske univers: Descartes havde skabt en distinktion mellem det fysiske og det psykiske,

Hasard og sandsynlighed

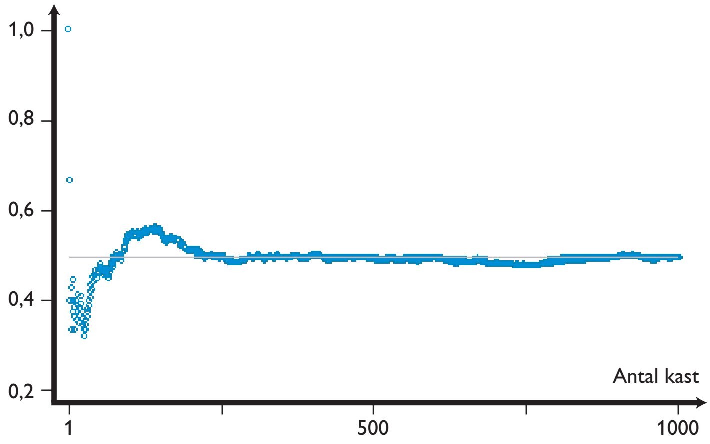
Det var en berømt korrespondance fra 1654 mellem Blaise Pascal og Pierre de Fermat (1601-65), som i første omgang startede matematikernes interesse for sandsynlighedsregning. Brevvekslingen skyldtes en hasardspiller, Antoine Gombaud (1607-84), som spurgte Pascal og Fermat, hvad man skulle gøre i følgende situation. To spillere (A og B) af samme styrke spiller et spil, hvor den, der først når seks point, vinder det hele. Hvis spillet afbrydes før tid, og det f.eks. står 4:3 – hvordan skal pengene så fordeles mellem de to spillere? Hvad er retfærdigt? Det er faktisk svært at finde den rette tilgang til en løsning, men Pascal og Fermat kom til følgende resultat: spillet vil være slut efter maksimalt a+b-1 runder. Lav en liste af alle muligheder og tæl, hvor mange gange A vinder, og hvor mange gange B vinder. I ovenstående eksempel er a = 2 og B = 3, og der er derfor $2^{(2+3-1)} = 2^4 = 16$ muligheder. Ud af dem får A de nødvendige to sejre eller flere 11 gange, mens B får de nødvendige tre sejre eller mere 5 gange. Derfor skal A have $\frac{11}{16}$ og B $\frac{5}{16}$ af pengene. Opskriften til Pascals og Fermats løsning kan i moderne notation skrives som:

$$\sum_{i=0}^{b-1} (\, a + b - 1i \,)\, \frac{1}{2^{a+b-1}}$$

Det er velkendt, at sandsynlighedsregningens oprindelse kan findes i hasardspil. Selvom folk var klar over, at hverdagen indeholdt mange uforudsigelige elementer, tilbød kort- og terningespil en matematisk tilgang til at tænke over sandsynligheder, fordi de består af en tællelig og dermed begrænset mængde af udfald. Geronimo Cardano, der var gambler og en udstødt eksistens, var den første, som nedskrev sandsynlighedsteoretiske beregninger i bogen *Liber de ludo aleae* ("Bogen om Spil og Held") fra 1560'erne, lang tid før Blaise Pascals og Pierre de Fermats berømte korrespondance fra 1654. Her ses *Falskspillerne* af Valentin de Boulogne fra 1620. Dresden Gemäldegallerie.

mellem det legemlige og det sjælelige, for at muliggøre en tænkende og erkendende bevidsthed, der var fri, og som kunne tænke over og erkende fænomener i den materielle verden.

Sandsynlighed og tilfældighed forekommer at være i direkte modstrid med forestillingen om kausal nødvendighed og determinisme. Tidligere matematikere, som f.eks. italieneren Cardano, havde opfattet sandsynlighed som udtryk for lykke eller held, dvs. for naturens uberegnelighed. I et mekanisk verdensbillede bliver sandsynlighed derimod knyttet til den tænkende eller erkendende, som et udtryk for manglende viden. Derfor troede man også, at man, hvis man var tilpas alvidende, ville kunne forudsige ethvert udfald. Den daglige forskning var dog mere jordnær. Ved at gennemføre et eksperiment med flere mulige udfald mange gange kunne man finde de til de enkelte udfald knyttede sandsynligheder, som var lovmæssigt fastlagte. Ved at kaste terninger igen og igen kunne man altså fastslå, med en stigende nøjagtighed, hvad sandsynligheden for forskellige udfald egentlig var.



I 1700-tallet beskrev Jakob Bernoulli "de store tals lov", som siger, at udfaldet af en lang række møntkast ligger tæt på den forventede værdi. På grafen ses resultatet af 1000 møntkast. Hvis plat får værdien 0 og krone værdien 1, vil gennemsnittet konvergere mod 0,5.

Matematikeren Jakob Bernoulli (1654-1705) formulerede den indsigt i et værk om sandsynlighedsregning, *Ars Conjuctandi* fra 1713, som "de store tals lov", dvs. antagelsen om, at der ved mange gentagelser eller ved store mængder af fænomener kunne fremkomme en art "statistisk lovmæssighed", der var ligeså determineret som mere simple fysiske processer.

At der bag ved komplekse og tilsyneladende tilfældige og mangfoldige fænomener kunne være lovmæssigheder, og at disse kunne begribes matematisk – det var en meget afgørende ide for den videre udvikling af naturvidenskaben, der bl.a. førte til udviklingen af statistikken. To helt nye fænomenområder var altså blevet gjort tilgængelige for videnskabelig behandling på ganske kort tid i årene fra 1660 til 1700: bevægelse og tilfældighed.

I begyndelsen af 1600-tallet havde englænderen Francis Bacon talt for, at man burde udvikle en videnskab – en natur-filosofi, som han kaldte det – baseret på viden om fænomenernes årsager. Det ville muliggøre, at mennesket kunne gribe ind i begivenheder og derfor kontrollere dem. Videnskaben skulle altså finde årsager og årsagssammenhænge og dernæst bruge denne viden til at frembringe eller forhindre visse tilstande og fænomener. Således ville viden kunne gøres nyttig og ikke bare give indsigt. Bacon opdelte viden i to typer: teoretisk, der omhandlede viden om naturens lovmæssigheder, og praktisk, der handlede om, hvordan man kunne bruge teoretisk viden til at frembringe ønskede tilstande og fænomener. Det er en ganske anden forståelse af, hvad der menes med "praktisk" end Aristoteles' og aristotelismens, hvor det praktiske var det, der havde med samfundet, moral og politik at gøre, og derfor meget nærmere til det, man i dag mener med "praktisk".

Ved slutningen af 1600-tallet var man begyndt at realisere nogle af Bacons visioner. Man havde f.eks. opnået indsigt i nogle fundamentale sammenhænge inden for fysikken, og man havde relevante matematiske teorier og metoder til rådighed. Galilei havde ikke kun studeret et legemes frie fald, men også materialers styrke. Det muliggjorde mere avancerede beregninger af bygningers og bygningselementers dimensionering. Man kunne måle og beregne på legemer i bevægelse – f.eks. projektiler. Artilleriet kunne derved benytte matematisk-fysiske metoder til at effektivisere krigen, hvilket også fik indflydelse på konstruktionen af befæstningsanlæg.

Man havde således udviklet nye måle- og observationsinstrumenter, nye beregningsmetoder og nye fysiske teorier, der alle muliggjorde løsninger på flere og flere praktiske problemer. Man kunne kort sagt udvikle en videnskabeligt baseret teknologi. Det var noget ganske nyt.